JOURNAL OF NORTHEASTERN UNIVERSITY
Volume 26 Issue 01, 2023 ISSN: 1005-3026 https://dbdxxb.cn/ Original Research Paper

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ КАРЛЕМАНА

Ашурова Зебинисо Рахимовна
кандидат физ-мат. наук, доцент кафедры математического анализа
Самаркандского Государственного Университета имени Ш. Рашидова,
Узбекистан г. Самарканд,

Жураева Нодира Юнусовна
кандидат физ-мат. наук, доцент кафедры высшей математика
Ташкентский Университет Информационных Технологий имени
Мухаммада Ал-Хоразмий, Узбекистан г. Ташкент.

Резюме: В данной работе приведена некоторые оценки построеной У.Жураевой функции Карлемана для бигармонических функций заданные в области $D=\left\{y\colon y=(y_1,y_2),-\infty<y_1<\infty,0<y_2<\frac{\pi}{\rho},\rho>0\right\}$ функций заданных в двумерном пространстве.
Ключевые слова: Теорема типа Фрагмена — Линделефа, бигармоническая функция, функция Карлемана, интегральное представление.

Annotation: In this article we consider some estimates of the Carleman's function constructed by U.Yu.Juraeva, to find integral representation for the biharmonic functions($\Delta^2\mathrm{u}(\mathrm{y})=0$)defined in unbounded domain $D=\left\{y\colon y=(y_1,y_2),-\infty<y_1<\infty,0<y_2<\frac{\pi}{\rho},\rho>0\right\}$ of two dimensional Euclidean space.
Key words. Phragmen-Lindelof type theorem, Carleman's functions, byharmonic functions, integral representation.

Рассматриваем задачу : Пусть $u(\mathrm{P})$ гармоническая функциязаданная в бесконечном области D в двухмерном Евклидовом пространстве, непрерывных вплоть до границы области со своими производными первого порядка. Требуется показать, что если функция и ее нормальная производная ограничены на границе D и $u(\mathrm{P})$ неограниченна внутри, то при $\mathrm{P}\to\infty$ она должна расти внутри D со скоростью, не меньшей некоторой предельной, и оценить эту предельную скорость роста. В статьях

Submitted: 13/03/2023 **Accepted**: 09/04/2023

Е.М.Ландис[1],М.А.Евграфов, И.А.Чегис[2], А.Ф.Леонтьевев[4],,И.С.Аршон[3], Leontiev A.F.[4], Armstrong-Sirakov-Smart [5], AdamowiczT [6] ,JinZ., Lancaster K [7], Ш. Ярмухамедов,[8]-[9] , Ашурова Зебинисо Рахимовна [12], Н. Жураева[14], У Жураева[17], устанавливаются возможные скорости возрастания и убывания решения, определенного в неограниченной области при удалении точки в бесконечность. Эта скорость возрастания или убывания зависит от формы области и характера граничных условий. Выясняются также возможные скорости возрастания и убывания решения в окрестности граничной точки в зависимости от строения границы в окрестности этой точки и от характера граничных условий. Например: А. Ф. Леонтьев в статье- О теоремах типа Фрагмена–Линделефа для гармонических функций в цилиндре, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1963, том 27, выпуск 3, 661–676. получил следующую теорему

Теорема 2. Пусть $u(r,\phi,x)$— гармоническая функция. в круглом цилиндре :$0 \le r \le \mathrm{a}$, $0 \le \phi < 2\pi,\ -\infty < \mathrm{x} < \infty$. Если выполнено условие

$u(a,\phi,x)$=0, $\left|\frac{\partial u}{\partial r}(r,\phi,x))\right| < cexp\mu(x)$,

$$\max_{(r,\phi)} |u(r,\phi,x)| < c\, exp\, exp\, \frac{\pi|x|}{2(a+\varepsilon)}, \varepsilon > 0$$

тогда $u(r,\phi,\mathrm{x}) \equiv 0$

причем $\mu(x) < \frac{\propto}{\mathrm{a}}$, где $\propto$-наименьший положительный нуль функции Бесселя $J_0(x)$, тогда $u(r,\phi,\mathrm{x}) \equiv 0$.

Используя идеи М.М.Лаврентьева, Ш. Ярмухамедов в своих работах впервые предлагает метод построения семейства фундаментальных решений уравнения Лапласа. Им получена интегральная формула Грина в неограниченной области в классе растущих гармонических функций. В этом направлении им было установлено теорема типа Фрагмена - Линделефа для гармонических функций.

Ашурова Зебинисо Рахимовна в работах [12] получила несколько теорем типа Фрагмента-Линделефа для гармонических функций многих переменных.

Жураева Н в 2009 году получила регуляризацию и разрешимость задачи Коши для полигармонических уравнений порядка n в некоторых неограниченных областях (при произвольных нечетных m и четных m когда 2n < m) [4]-[8]. Позже совместно с Жураевой У в 2009 году эту задачу для некоторых неограниченных областях (при произвольных четных m когда 2n ≥ m). Ашурова Зебинисо Рахимовна, Нодира Жураева и Умида Жураева совместно для гармонических функций двух переменных[13]-[15].

В этой работе приведена некоторые оценки роста функции Карлемана построенной У.Жураевой внутри областей вида полосы.

Пусть R^2 - двухмерное вещественное евклидово пространство,

$$x = (x_1, x_2), x' = (x_1, 0), \ r = |x - y|, \ s = |x' - y'|, \ \alpha^2 = s,$$

$$D = \left\{y: y = (y_1, y_2), y_1 \in R, 0 < y_2 < h, h = \frac{\pi}{\rho}, \ \rho > 0\right\}.$$

Функцию $\Phi_\sigma(y, x)$при $s > 0, \sigma \geq 0, a \geq 0$, определим:

$$\Phi_\sigma(y, x) = \boldsymbol{c_0}(8\pi)^{-1} \int_{\sqrt{s}}^{\infty} \mathrm{Im}\left[\frac{\exp(\sigma\omega+\omega^2) - ac \quad _1\left(\omega-\frac{h}{2}\right)}{\omega - x_2}\right](u^2 - s)du, \omega = iu + y_2, \qquad (3)$$

Теорема 1. $\Phi_\sigma(y, x)$ является полигармонической функцией порядка 2 по y при s> 0 и для этой функции имеет место

$$\Phi_\sigma(y, x) = c_0\left(r^2 \ln r + G_\sigma(x, y)\right),$$

где $G_\sigma(y, x)$ регулярная по переменному y и непрерывно дифференцируемая на $\overline{D}$.

Теорема 2. Для функции $\Phi_\sigma(y, x)$которую можно представить в виде$\Phi_\sigma(y, x) = r^2(J_1^1 - J_1^2)$имеет место

$$\left|\boldsymbol{\frac{\partial J_1^1}{\partial y_1}}\right| \leq \boldsymbol{\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)\frac{c_0}{exp(A)}}, \qquad \left|\frac{\partial J_1^2}{\partial y_1}\right| \leq \left(\frac{1}{r^3}\right)\frac{c_0}{exp(A)}$$

$$\left|\boldsymbol{\frac{\partial J_1^1}{\partial y_2}}\right| \leq \boldsymbol{\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\frac{c_0}{exp(A)}}, \qquad \frac{\partial J_1^2}{\partial y_2} \leq \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)\frac{c_0}{exp(A)}$$

где, $A = ach\alpha\rho_1, Q = exp(\sigma y_2 + y_2{}^2)$,

$$A_2 = \left((\sigma + 2y_2)\sqrt{r^2 t + s} \pm asin\rho_1\left(y_2 - \frac{h}{2}\right)sh\rho_1\sqrt{r^2 t + s}\right),$$

$$J_1^1 = \int_0^\infty \frac{Q(y_2 - x_2)sinA_2}{exp\left(ach\rho_1\sqrt{r^2t+s}cos\rho_1\left(y_2 - \frac{h}{2}\right)\right)exp(r^2t+s)(t+1)}\frac{tdt}{\sqrt{r^2t+s}}$$

$$J_1^2 = \int_0^\infty \frac{QcosA_2}{exp\left(ach\rho_1\sqrt{r^2t+s}cos\rho_1\left(y_2 - \frac{h}{2}\right)\right)(t+1)}\frac{tdt}{exp(r^2t+s)}$$

Теорема 2.Пусть внешняя нормаль к границе ∂D. Тогда для функции $\Phi(y, x)$ справедлива неравенство:

$$|\Phi_\sigma(y,x)| \leq \left(\frac{\sigma}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\frac{r^2 c_0}{exp(A)} = \frac{c_0(\sigma r+1)}{exp(A)}.$$

Список литературы:

[1] Е. М. Ландис, Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений, УМН, 1959, том 14, выпуск 1(85), 21–85.

[2] Евграфов М.А., Чегис И.А. Обобшение теоремы типа Фрагмена-Линделефа для гармонишеских функчии в пространстве. Доклады Академии наук СССР (134), 252–262 (1960).

[3] Аршон И.С., Евграфов М.А. О росте функчий, гармонишеских в чилиндре и огранишенных на его поверхности вместе с нормальной производной. Доклады Академии наук СССР (140), 321–324 (1962).

[4] Leontiev A.F. О теоремах типа Фрагмена-Линделефа для гармонических функций в цилиндре. Изв. АН СССР. Сер.матем. 1960. Vol. 27. pp. 661-676.

[5] Armstrong S. N., Sirakov B., Smart C. K. Singular solutions of fully nonlinear elliptic equations and applications. Arch. Ration. Mech. Anal. 205. no 2. 2012. pp. 345-394.

[6] Adamowicz T. Phragmen-Lindelof theorems for equations with nonstandard growth. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications 97. 2014. pp. 169- 184. 14. Bhattacharya T. On the behaviour of infinity-h

[7] Jin Z., Lancaster K. Theorems of Phragmen-Lindelof type for quasilinear elliptic equations. J. ReineAngew. Math. 514.1999. pp. 165-197.

[8] Jin Z., Lancaster K. Phragmen-Lindelof theorems and the asymptotic behaviour of solutions of quasilinear elliptic equations in slabs. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics 130. 2. 2000. pp. 335-373.

[9] Jin Z., Lancaster K. A Phragmen-Lindelof theorem and the behavior at infinity of solutions of non-hyperbolic equations. Pacific journal of mathematics 211. no 1. 2003. pp. 101-121

[10] Ш.Ярмухамедов, Формула Грина в бесконечной области и ее применение, ДАН СССР, 285(1985),№2, 697-700.

[11] Sh.Y.Yarmukhamedov, Задача Коши для полигармонического уравнения, Доклады РАН., 388(2003), 162-165.

[12] Ашурова Зебинисо Рахимовна.Теоремы типа Фрагмента-Линделефа для гармонических функций многих переменных. ДАН УзССР 1990, №5. 6-8 стр

[13] Ашурова Зебинисо Рахимовна Жураева Н.Ю., Жураева У.Ю. О некоторых свойствах ядро Ярмухамедова, InternationalJournalofInnovativeResearch , 2021,10, С.84–90, ImpactFactor 7.512.

[14] Z.R.Ashurova, N.YU.Jurayeva, U.Yu.Jurayeva, Growing Polyharmonic functions and Cauchy problem, Journal of Critical Reviews, Scopus. http://dx.doi.org/10.31938.jcr.07.06.62, Volume 7,Issue 7(2020), ISSN 2394-5125, P371-378. Country: India.

[15] Ashurova Z.R., Jurayeva N.YU., JurayevaU.Yu. Task Cauchy and Carleman function, Academicia: An International Multidisciplinary Research Journal, Affiliated to Kurukshetra University, Kurukshetra India, 2020, 10, С.371–378, URL :http://saarj.com.

[16] Н.Ю.Жураева,У.Ю.Жураева,У.Саидов, Функция Карлемана для полигармонических функций для некоторых областей лежащих в m-мерном четном евклидовом пространстве, UzbekMathematicalJournal, 3(2011). – 338.

[17] U.Yu.Jurayeva.Scientife Bullettin of NamSU – Научный вестник – NamDU ilmiy axborotnomasi - 2022_2-сон.35-41 .